Geometria Espacial de Posição

Professor: Deusvaldo de Sales Franco Júnior

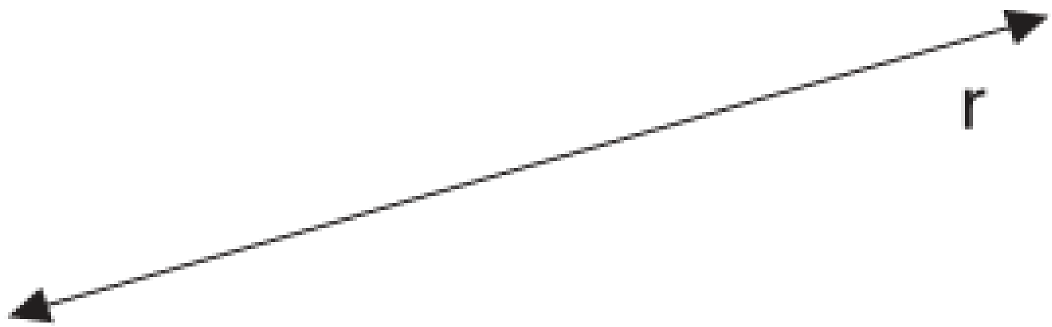
CONCEITOS PRIMITIVOS, POSTULADOS E POSIÇÕES RELATIVAS

- ***1. Conceitos primitivos*** **:** São conceitos primitivos (e, portanto, aceito sem definição) na Geometria espacial os conceitos de **ponto, reta e plano**. Habitualmente usamos a seguinte notação:

  Pontos: Letras maiúsculas do nosso alfabeto.

- •*A*

- ***Retas:*** Letras minúsculas do nosso alfabeto



- ***Planos:*** letras minúsculas do alfabeto grego.
- 

Observações:

- ***1. Espaço:*** É o conjunto de todos os pontos.Nesse conjunto, desenvolveremos a Geometria Espacial.
- ***2. Axiomas ou postulados (P):*** São proposições aceitas como verdadeiras sem demonstração e que servem de base para o desenvolvimento de uma teoria.
- Assim, iniciaremos a Geometria Espacial com alguns postulados, relacionando o ponto, a reta e o plano.

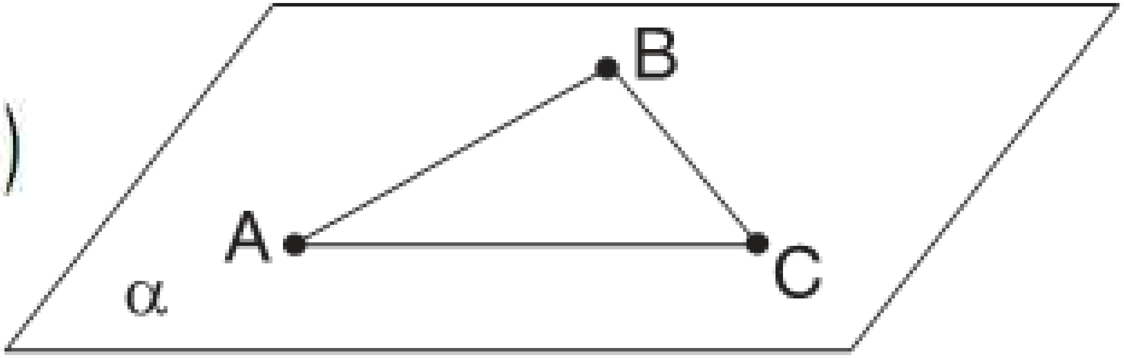
POSTULADOS

- ***1- Postulados da Existência:***
- ***P_1-*** Dada uma reta ***r***, **existem** nela, bem como fora dela, **infinitos pontos**.
- ***P_2 -*** Dado um plano α , ***existem*** nele, bem como fora dele, ***infinitos pontos***.

- ***2 - Postulados da Determinação:***
- ***P_3 -*** Por ***dois pontos distintos*** passa ***uma única reta***.

- *Notação:* $r \equiv \overleftrightarrow{AB}$

- ***P_4* -** Por ***três pontos distintos*** e ***não-colineares*** passa um ***único plano***.
- Notação: $\alpha = (\mathbf{A,B,C})$

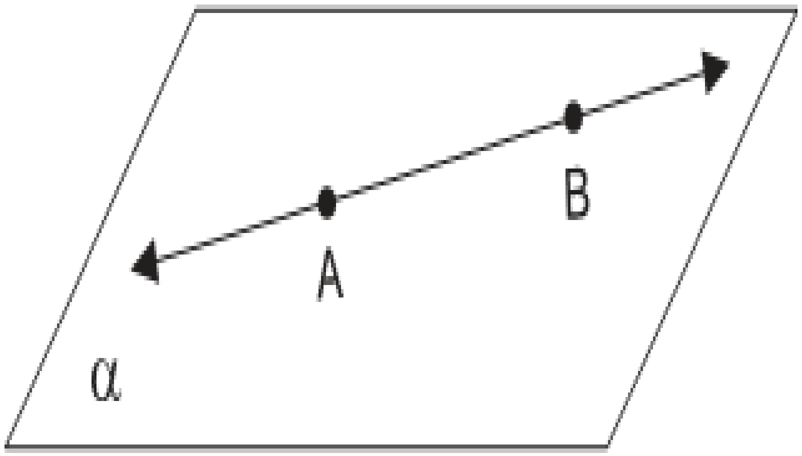


- ***3 - Postulados da Inclusão:***

- ***P_5* –** *Se uma reta* **r** *tem* ***dois pontos distintos*** *num* ***plano*** α, *então a reta* ***r está contida*** **nesse plano**:

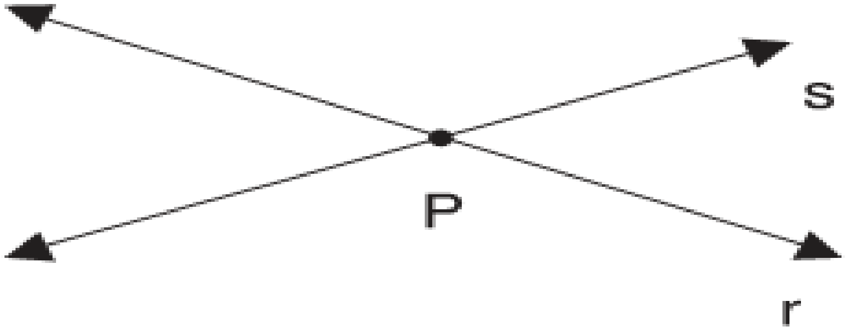
Simbolicamente, temos:

$$\begin{cases} A \neq B \\ r = \overleftrightarrow{AB} \\ A \in \alpha \\ B \in \alpha \end{cases} \Rightarrow r \subset \alpha$$



RETAS COPLANARES

- ***1- Definição de retas concorrentes :*** Diremos que duas retas ***r*** e ***s*** são ***concorrentes*** se, e somente se, ***elas têm um único ponto em comum,*** elas são ***oblíquas*** ou **perpendiculares**.



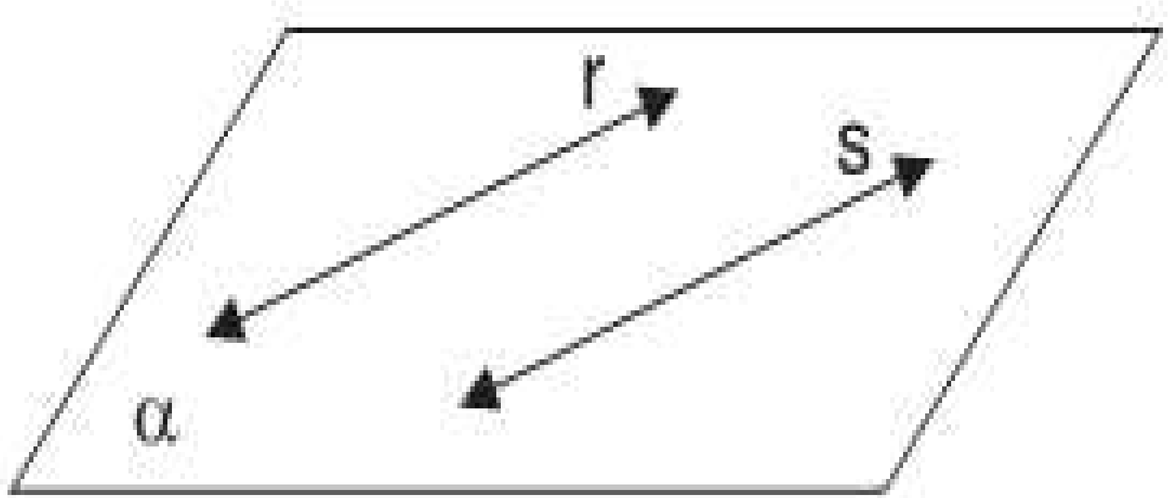
$$r \cap s = \{P\}$$

- ***2 - Definição de retas paralelas :*** Diremos que duas retas ***r*** e ***s são paralelas***, se e somente se, ***elas são coincidentes ou elas são coplanares*** e ***não têm pontos em comum.***

- ***1.° caso:***

Notação: $\mathbf{r} = \mathbf{s} \Rightarrow \mathbf{r} // \mathbf{s}$

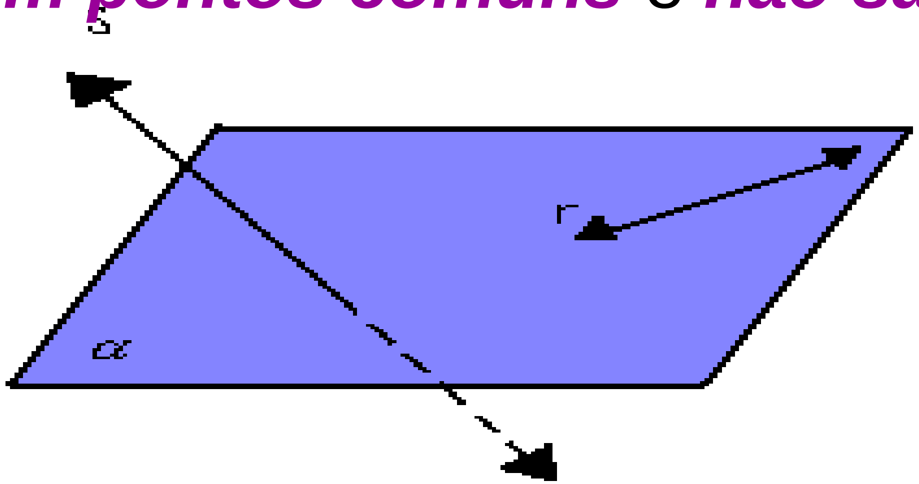
- ***2.° caso:***



Notação: $\mathbf{r} \subset \alpha$, $\mathbf{s} \subset \alpha$ e $\mathbf{r} \cap \mathbf{s} = \varnothing \Rightarrow \mathbf{r} // \mathbf{s}$

RETAS REVERSAS (NÃO COPLANARES)

- São retas que ***estão*** em ***planos distintos***, ***não possuem pontos comuns*** e ***não são paralelas***.



Re *versas*

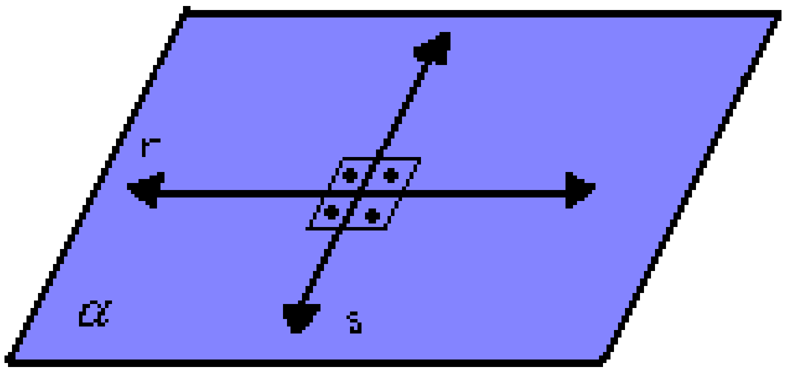
$r \cap s = \{\ \}$

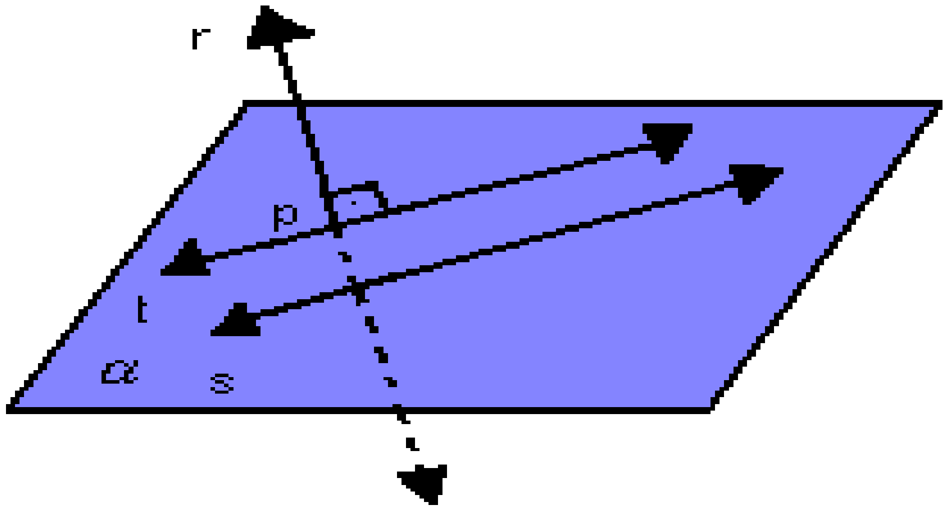
não existe plano que copntenha

r e s simultanea mente

Casos particulares de retas concorrentes e reversas:

- Temos que considerar dois casos particulares:
- ***Retas Perpendiculares:*** $r \perp s$





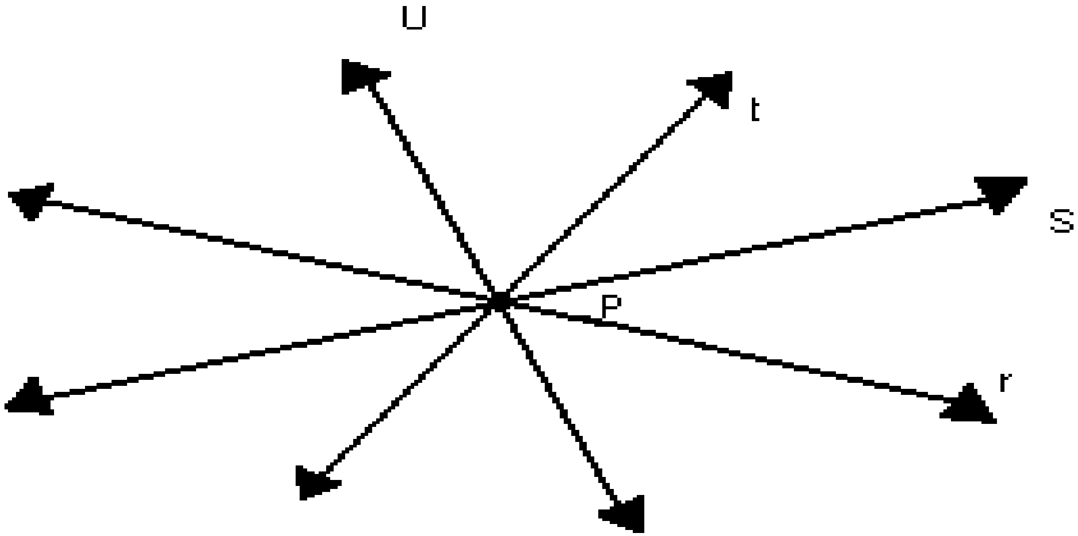
$$t \subset \alpha$$
$$s \subset \alpha$$

- **Retas Ortogonais:**

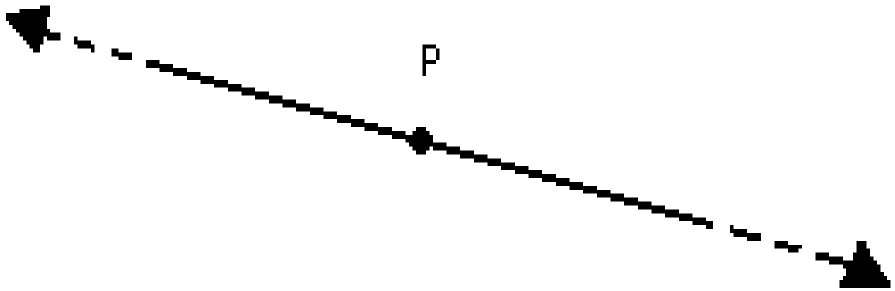
$$r \perp t \text{ e } r \perp s \Rightarrow t \,//\, s$$

OUTROS POSTULADOS

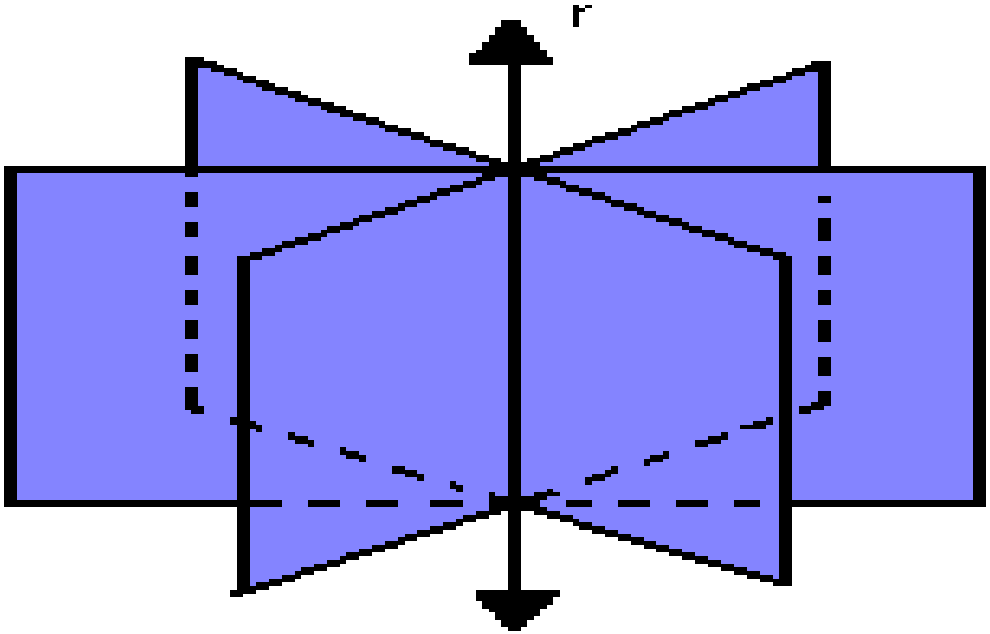
- P_2)***Por um ponto podem ser traçadas infinitas retas.***



- P_4) ***Um ponto qualquer de uma reta divide-a em duas semi-retas.***



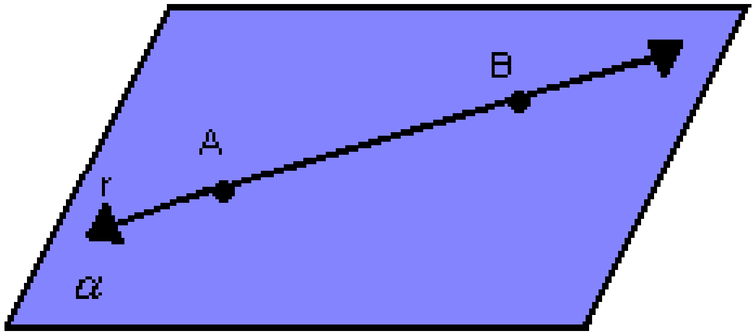
- P_6) **O plano é infinito, isto é, ilimitado.**
- P_7) **Por uma reta pode ser traçada uma infinidade de planos.**



- P_8) **Toda reta pertencente a um plano divide-o em duas regiões chamadas *semiplanos*.**
- P_9) **Qualquer plano divide o espaço em duas regiões chamadas semi-espaços.**

Posições relativas de reta e plano

- Vamos considerar as seguintes situações:
- **I - Reta contida no plano**
- Se uma reta **r** tem **dois pontos** distintos num plano α, então **r está contida** nesse plano:

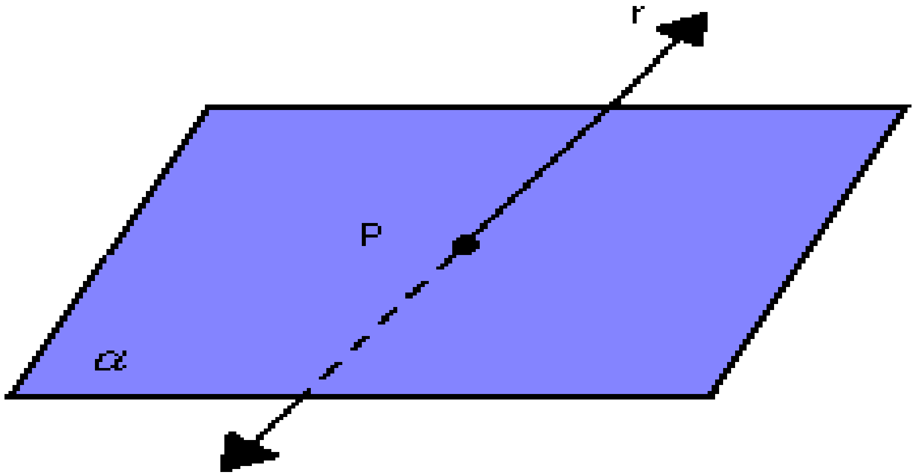


$$\left.\begin{array}{l} A \in \alpha \text{ e } B \in \alpha \\ A \in r \text{ e } B \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r \subset \alpha$$

- II - ***Reta concorrente ou incidente ao plano***
- Dizemos que a reta **r** "***fura***" o plano α ou que ***r*** e α são ***concorrentes*** em ***P*** quando:

$$\mathbf{r \cap \alpha = \{ P \}}$$

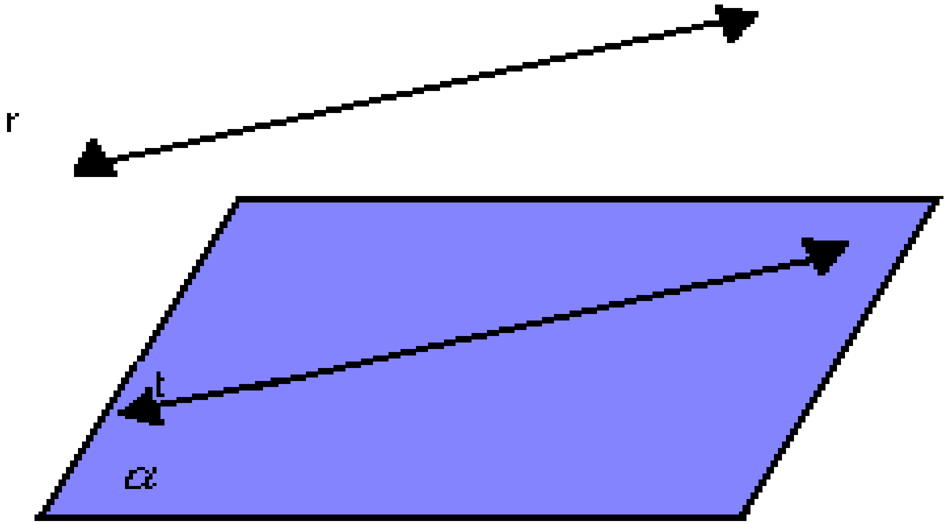
- Observação: A reta **r** é ***reversa*** a ***todas as retas*** do plano α que ***não passam*** pelo ponto ***P***.



- III - ***Reta paralela ao plano:***
- Se uma reta ***r*** e um plano α ***não têm ponto em comum***, então a reta ***r*** é ***paralela*** a uma reta ***t contida*** no plano α portanto, $r \,//\, \alpha$.

$$r \,//\, t,\ t \subset \alpha \Rightarrow r \,//\, \alpha$$

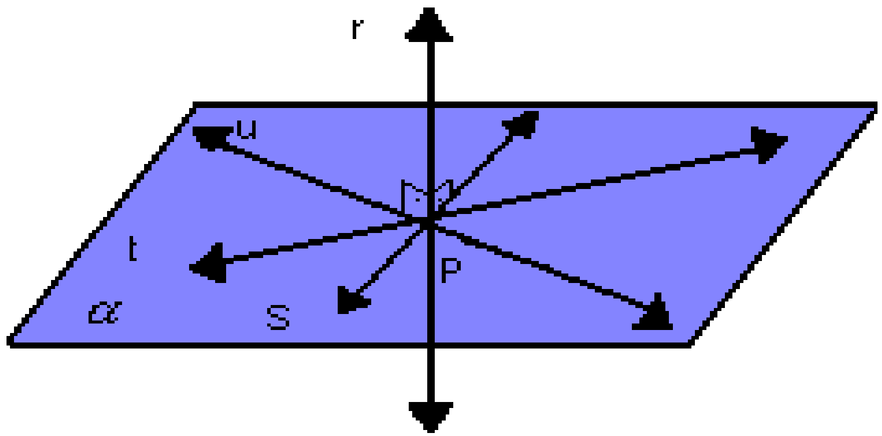
- Em α existem infinitas retas **paralelas, reversas ou ortogonais a r.**



- Teorema da Intersecção de Dois Planos: **Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a sua intersecção é dada por uma única reta que passa por esse ponto.**

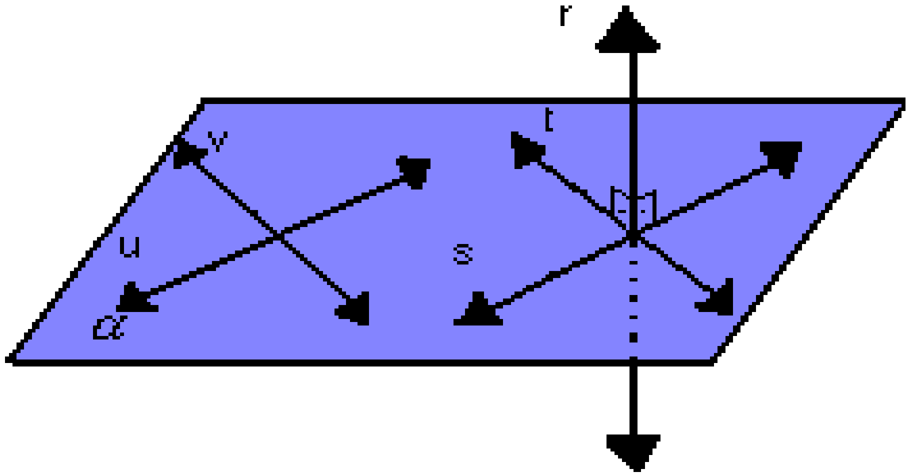
PERPENDICULARISMO ENTRE RETAS E PLANOS

- **DEFINIÇÃO:** Uma reta ***r*** é **perpendicular** a um plano α se, e somente se, ***r*** é ***perpendicular a todas*** as ***retas*** de α que ***passam*** pelo ***ponto de intersecção de r e*** α.



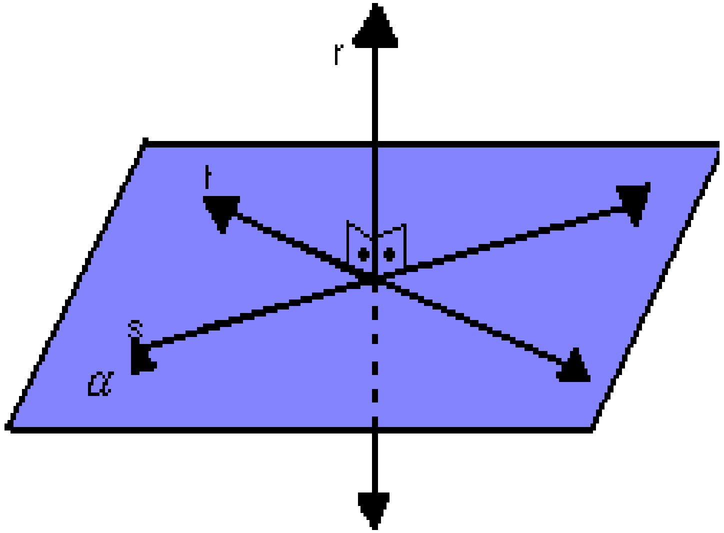
Note que: Se uma reta ***r*** é ***perpendicular*** a um plano α, então ela é ***perpendicular ou ortogonal*** a toda reta de α :

- Vejamos a representação feita abaixo:



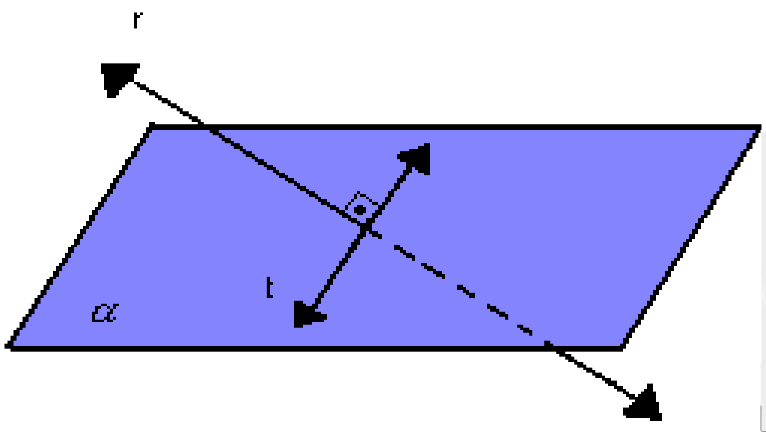
$$\left.\begin{array}{l} r \perp \alpha \\ s \subset \alpha, t \subset \alpha, u \subset \alpha, v \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp s, r \perp t, r \perp u \text{ e } r \perp v$$

- Para que uma reta ***r*** seja ***perpendicular*** a um plano α, basta ser ***perpendicular*** a ***duas*** retas ***concorrentes***, ***contidas*** em α, conforme figura abaixo:



$$\left.\begin{array}{l} r \perp s \text{ e } r \perp t \\ s \subset \alpha \text{ e } t \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp \alpha$$

- Observe, na figura abaixo, por que ***não basta que r*** seja ***perpendicular*** a ***uma única reta t*** de para que seja ***perpendicular ao plano***:



$$\begin{cases} r \perp t\,(t \subset \alpha) \\ r \text{ não é perpendicular a } \alpha \end{cases}$$

EXERCÍCIOS PARA SALA DE AULA – PÁGINA 14

1. Sem dúvida, um dos grandes feitos de Euclides foi a maneira formal com que ele apresentou o conteúdo de seu célebre livro *Os elementos*, conjunto de 13 livros dedicados ao fundamento e desenvolvimento lógico e sistemático da geometria. Os princípios dos quais parte Euclides para edificar a geometria são as definições, os entes primitivos e os postulados.

Biblioteca da Matemática moderna, de
Antônio Marmo de Oliveira e Agostinho Silva. (adaptado)

a) Como é chamada uma afirmação indubitável, inquestionável, evidente por si só, que não carece de demonstração?
b) Quais foram os entes primitivos (conceitos primitivos) utilizados por Euclides na sistematização da geometria?
c) Como são chamadas as proposições que podem ser demonstradas, partindo de fatos justificáveis?

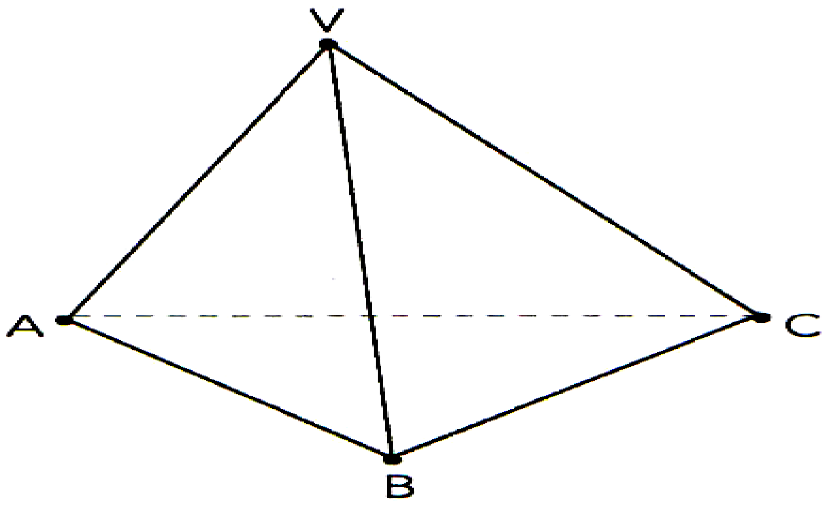
- RESOLUÇÃO:
- A) Postulado, pois os postulados são constatações que não necessitam ser comprovadas para que sejam consideradas verdadeiras.
- B) Ponto, reta e plano.
- C) Teoremas

2. Ao imaginar uma fina folha de papel ofício prolongada indefinidamente além de seus limites, no comprimento e na largura, ambos nos dois sentidos, ficando a espessura invariável, tem-se a ideia de

a) reta.
b) semirreta.
c) plano.
d) semiplano.
e) espaço

- RESOLUÇÃO:
- Como o prolongamento é infinito nos dois sentidos e em duas dimensões (comprimento e largura), tem - se a ideia de plano, elemento geométrico infinito com duas dimensões.
- LETRA C

3. Em uma pirâmide, todos os vértices ("cantos") ficam em um mesmo plano, exceto um deles. Os vértices coplanares formam a base da pirâmide e o vértice que não pertence ao plano da base é chamado de vértice da pirâmide. Imagine uma pirâmide cuja base é um triângulo ABC e cujo vértice é o ponto V.



a) Quantas retas passam pelo vértice da pirâmide?
b) Dentre as retas suportes das arestas ("quinas") da pirâmide, quantas passam pelo vértice da pirâmide?
c) Quantos planos contêm a aresta $\overline{AV}$?
d) Entre os planos determinados pelos vértices da pirâmide, está o plano da base, PL(ABC). Quais são os outros planos determinados pelos vértices da pirâmide?

- RESOLUÇÃO:

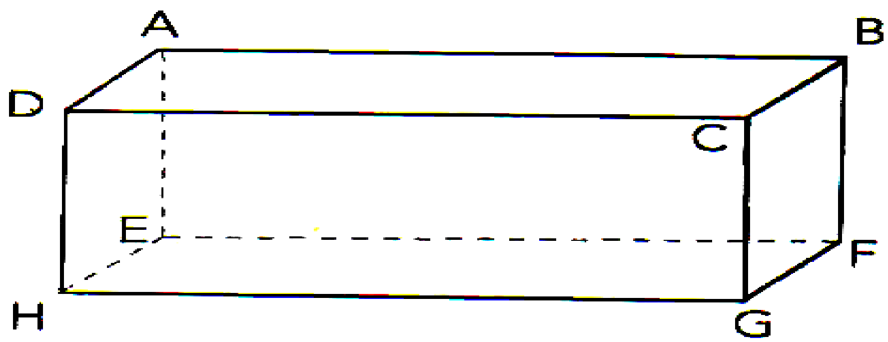
- A) INFINITAS

- B) TRÊS RETAS

- C) INFINITOS

- D) Pl(V, B, C)
-     Pl (V, A, C)
-     Pl (V, A, B)

4. No paralelepípedo reto-retângulo representado a seguir, os pontos A, B, C e D são coplanares e pertencem ao plano da face ABCD. Esse plano pode ser representado por três quaisquer desses quatro vértices, em qualquer ordem: PL(ABC) = PL(ABD) = PL(BCD) = PL(ABCD).



a) Dentre os planos determinados pelos vértices ("cantos"), quais são aqueles que contêm a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e não contêm a reta $\overleftrightarrow{EF}$?

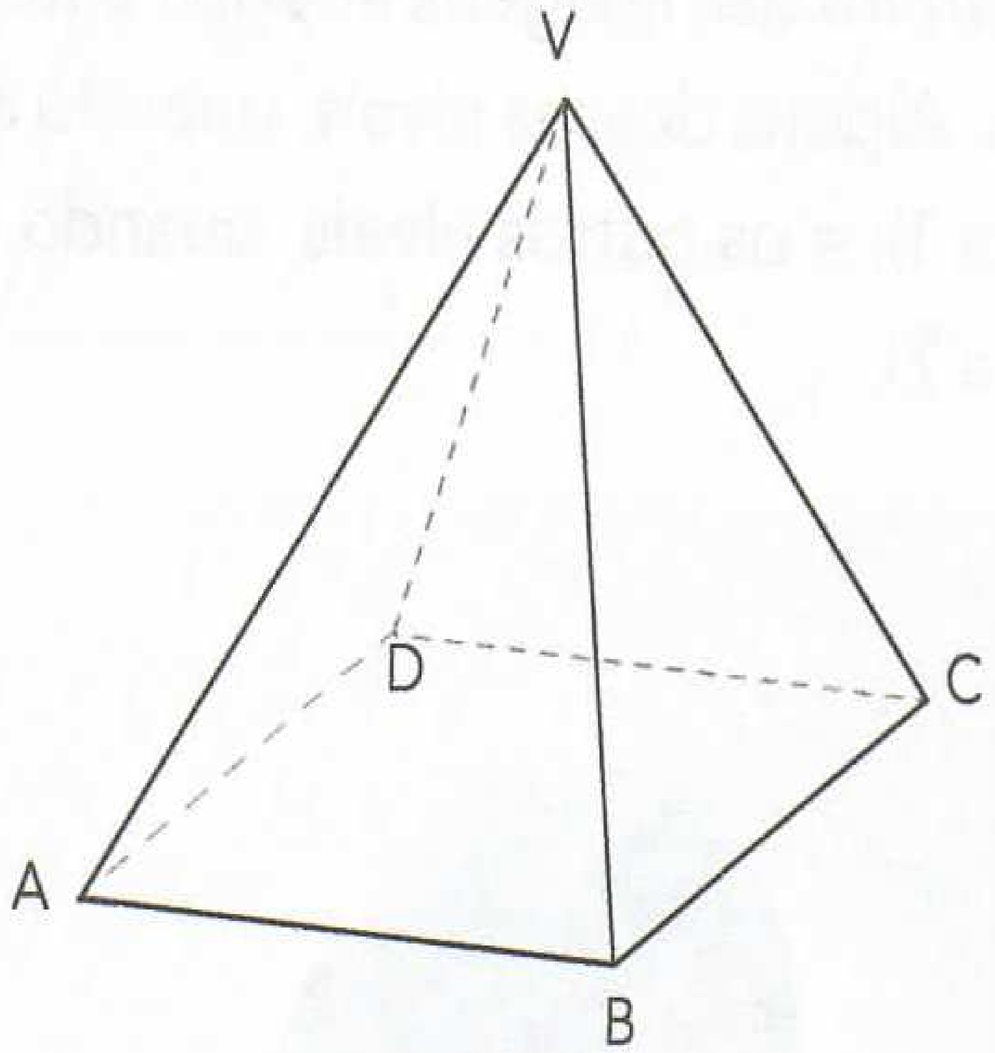
b) Os vértices determinam retas que contêm as arestas, retas que contêm as diagonais das faces (retângulos) e retas que contêm as diagonais do paralelepípedo (passam por dentro do sólido geométrico). Ao todo, quantas retas estão determinadas pelos vértices?

- RESOLUÇÃO:

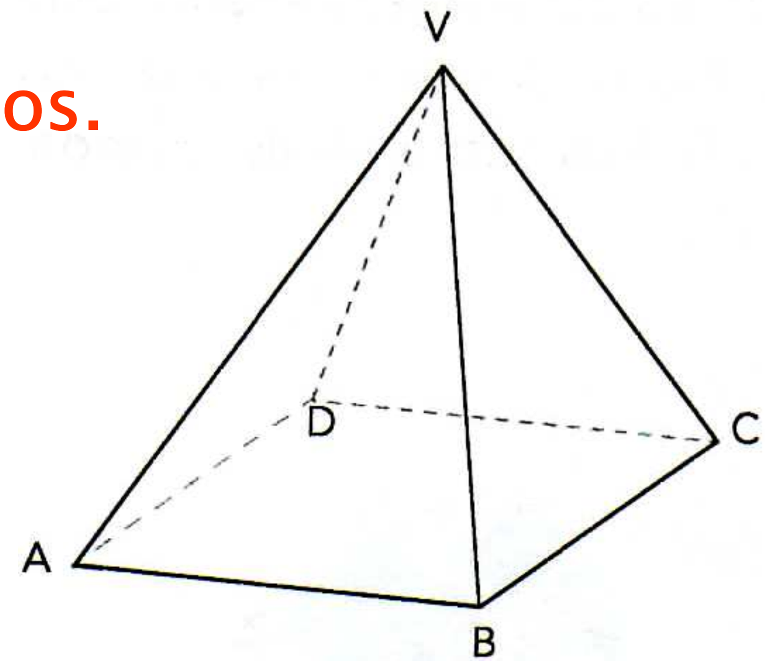
- A) Pl (A, B, C) e Pl(A, B, G) (Dois Planos)
- OBS: Note que os planos Pl(A, B, C)=Pl(A, B, C, D)
- e Pl(A, B, G)=Pl(A, B, G, H)

- B) São 8 vértices ("cantos") e cada vértice pode ser ligado aos outros 7 vértices, determinando sete retas.
- Logo o total de retas é de 8 . 7 = 56.
- Porém como cada reta é contada duas vezes temos que o total de retas é de 56 : 2 = 28 retas.

5. A base de uma pirâmide é um quadrado. Quantos planos os vértices dessa pirâmide determinam?



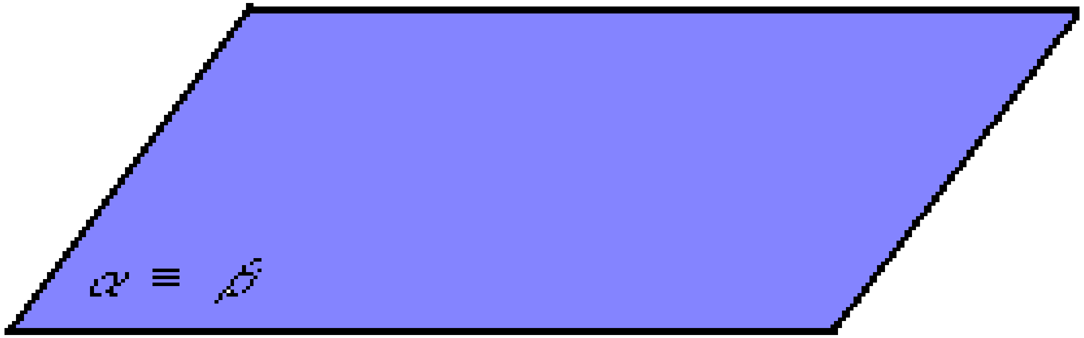
- RESOLUÇÃO:
- Determinam sete planos.



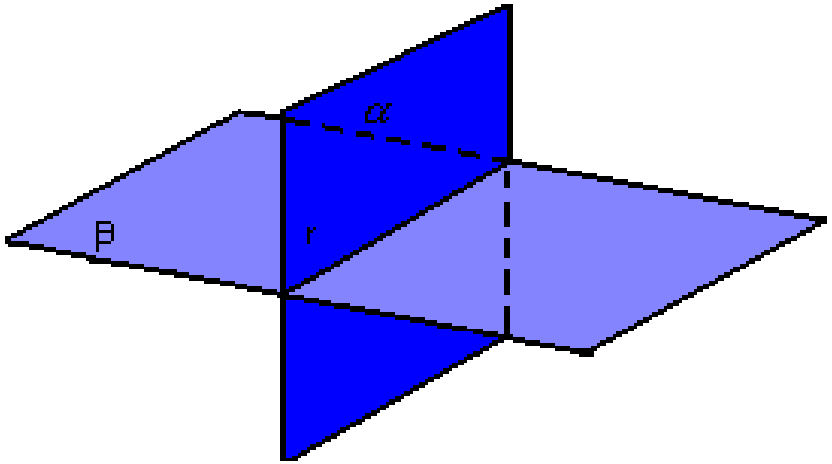
- Além dos planos das faces temos os planos das diagonais com os vértices.
- Pl(VDB); Pl(VAC); Pl(ABCD); Pl(VAB); Pl(VBC); Pl(VCD);
- Pl(VDA).

POSIÇÃO RELATIVA ENTRE DOIS PLANOS

- Consideramos as seguintes situações:
- I – Planos ***Paralelos Coincidentes*** ou ***Iguais***:

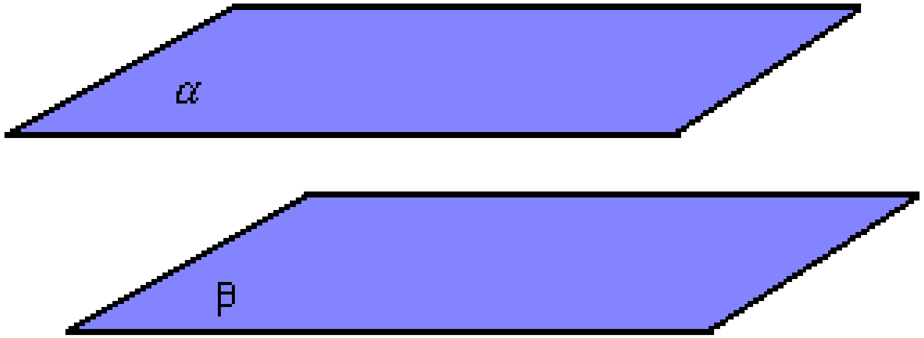


- II – Planos ***Concorrentes*** ou ***Secantes***:Dois planos α e β são **concorrentes** quando sua **intersecção** é uma **única reta**:



$$\alpha \cap \beta \equiv r$$

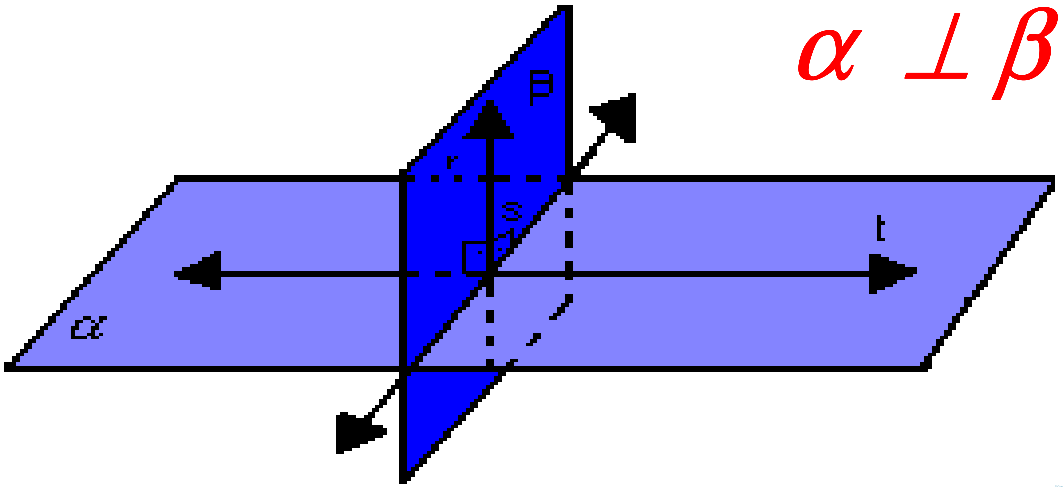
- III – Planos ***Paralelo Distintos***: Dois planos, α e β, são ***paralelos*** quando sua ***intersecção*** é ***vazia***:



$$\alpha // \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing$$

- ***Perpendicularismo entre Planos.***
- Dois planos, α **e** β são ***perpendiculares*** se, e somente se, existe ***uma reta*** de ***um deles*** que é ***perpendicular ao outro:***

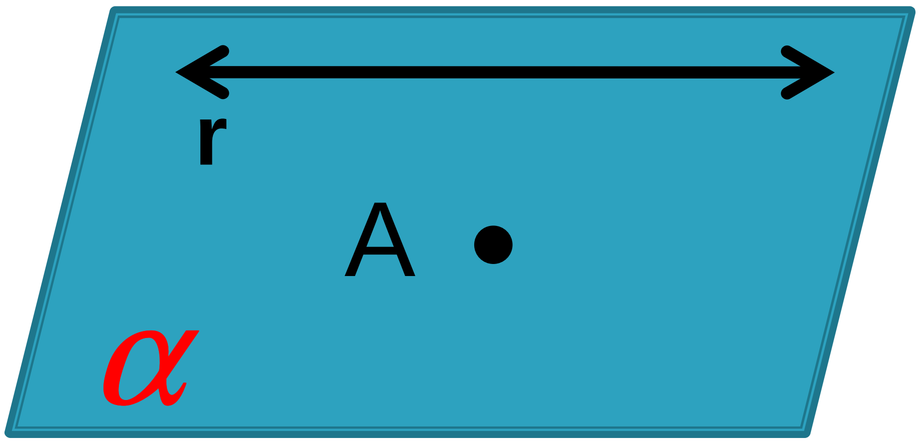
$$\alpha \perp \beta \Rightarrow \exists\ \mathbf{r} \subset \alpha\ \mathbf{e}\ \mathbf{r} \perp \beta$$



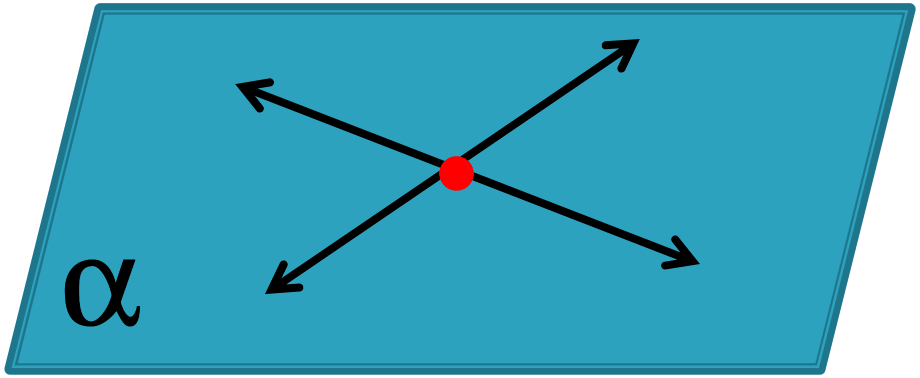
- ***Observação:*** Existem ***infinitos planos perpendiculares*** a ***um plano dado***; esses planos podem ser ***paralelos entre si ou secantes***.

- ***OUTROS TEOREMAS IMPORTANTES:***

- **T_1- Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano.**

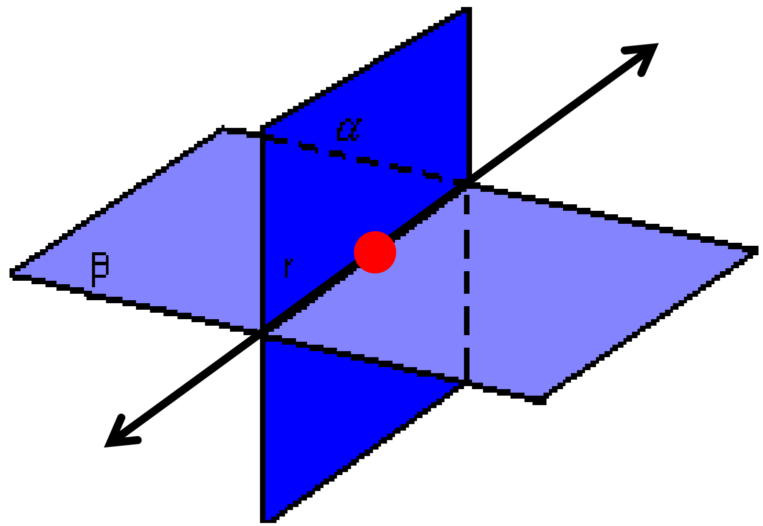


- T_2 - **Duas retas concorrentes determinam um plano.**



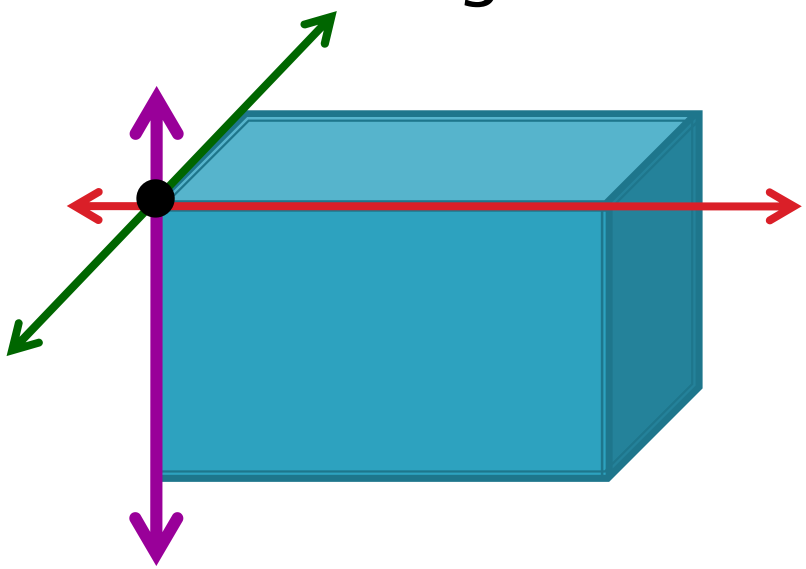
- T_3 - **Duas retas paralelas distintas determinam um único plano.**

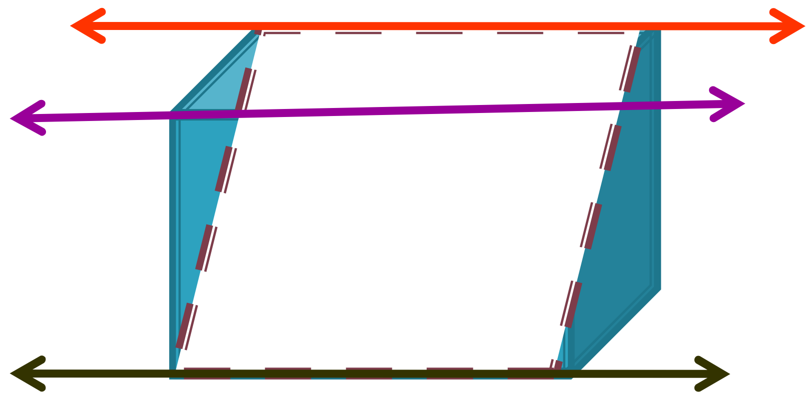
- T_4 – Se dois planos distintos têm um ponto comum, então esses dois planos interceptam – se segundo uma única reta que passa pelo ponto comum.



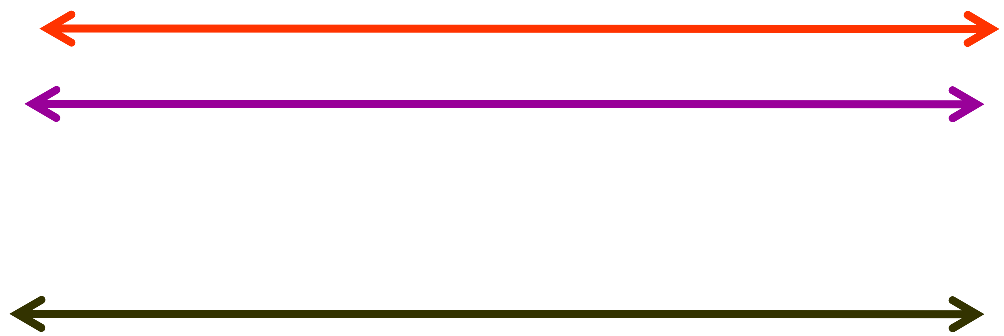
- T_5 – Se três planos α, β e δ são distintos e dois a dois secantes segundo três retas a, b e c; duas a duas distintas, então essas três retas ou são concorrentes num mesmo ponto ou são duas a duas paralelas.

- Observe figura abaixo:





- **T_6 - Se duas retas distintas são ambas paralelas a uma terceira, então elas são paralelas entre si.**



- T_7 – Se uma reta r, não está contida em um plano α, e é paralela a uma reta b desse plano,então a reta r é paralela ao plano α.

- T_8 – Se uma reta a é paralela a um plano α, então esta reta é paralela a alguma reta b, desse plano α.

- **T9 – Três planos distintos dois a dois secantes possuem como intersecção um único ponto, três retas concorrentes duas a duas ou três retas paralelas duas a duas.**

- **T10 – Se uma reta não está contida em plano e é paralela a alguma reta do plano então ela é paralela ao plano.**

- **T11 – Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano então ela perpendicular ao plano.**

- **Condição necessária e suficiente para que uma reta seja paralela a um plano:**

  Uma reta (r) não contida em um plano é paralela ao plano, se somente se, (r) é paralela a alguma reta (s) do plano.

- **T_{12} – Se uma reta (r) é paralela a intersecção de dois planos secantes então (r) está contida em um dos planos e é paralela ao outro, ou (r) é paralela aos dois planos.**

- **T_{13} – Se duas retas são paralelas distintas e uma delas é paralela a um plano, então a outra reta é paralela ou está contida no plano.**

- **T_{14} – Se dois planos distintos são paralelos então toda reta de um deles é paralela ao outro.**
- **T_{15} – Se dois planos distintos são paralelos então toda reta de um deles é paralela ou reversa a alguma reta do outro.**
- **T_{16} – Se dois planos distintos são paralelos então toda reta concorrente a um deles também é concorrente ao outro.**
- **T_{17} – se dois planos distintos são paralelos e se interceptam a um terceiro, então as intersecções são paralelas.**